

Runda III – 15 XII 2023 r.

UWAGA!

1. Rozwiązanie każdego zadania musi zawierać uzasadnienie, chyba że polecenie wprost mówi inaczej. Nawet bezbłędna odpowiedź nie otrzyma maksymalnej liczby punktów, jeśli nie jest uzasadniona.
2. Uzasadnieniem powinien być dokładny i systematyczny spis faktów i reguł oraz czytelne przedstawienie sposobu rozumowania, który doprowadził Cię do rozwiązania. Nie podawaj odpowiedzi alternatywnych w nadziei, że jedna z nich będzie poprawna (chyba że oczywiście o taką odpowiedź chodzi w zadaniu). Jeśli podasz więcej niż jedną odpowiedź, nie dostaniesz punktów, nawet jeśli jedna z nich jest właściwa. Nie dostaniesz też punktów za przedstawienie różnych, sprzecznych ze sobą uzasadnień, pamiętaj więc, aby usunąć (wymazać lub skreślić) wszystko, czego nie chcesz zawrzeć w ostatecznym, ocenianym przez jury rozwiązaniu.

Zadanie 1. W czworokącie $ABCD$, bok AB jest równoległy do boku DC . Udowodnij, że

$$\frac{PA}{PB} = \left(\frac{PD}{PC}\right)^2,$$

gdzie P jest punktem leżącym na boku AB tak, że

$$\sphericalangle DAB = \sphericalangle DPC = \sphericalangle CBA.$$

Zadanie 2. Znajdź wszystkie funkcje $f(x) = \frac{47}{ax+b}$, $a, b \in \mathbb{Z}$, $a > 0$ takie, że $f(4)$ oraz $f(7)$ są liczbami całkowitymi.

Zadanie 3. W skrzyni znajdują się przedmioty o wadze 3 kg , 4 kg lub 5 kg . Masa wszystkich przedmiotów wynosi 120 kg . Udowodnij, że istnieje podzbiór przedmiotów ważących dokładnie 60 kg .