LIGA MATEMATYCZNA
LO5 we Wrocławiu

Runda I – 15 X 2023 r.

UWAGA!

1. Rozwiązanie każdego zadania musi zawierać uzasadnienie, chyba że polecenie wprost mówi inaczej. Nawet bezbłędna odpowiedź nie otrzyma maksymalnej liczby punktów, jeśli nie jest uzasadniona.
2. Uzasadnieniem powinien być dokładny i systematyczny spis faktów i reguł oraz czytelne przedstawienie sposobu rozumowania, który doprowadził Cię do rozwiązania. Nie podawaj odpowiedzi alternatywnych w nadziei, że jedna z nich będzie poprawna (chyba że oczywiście o taką odpowiedź chodzi w zadaniu). Jeśli podasz więcej niż jedną odpowiedź, nie dostaniesz punktów, nawet jeśli jedna z nich jest właściwa. Nie dostaniesz też punktów za przedstawienie różnych, sprzecznych ze sobą uzasadnień, pamiętaj więc, aby usunąć (wymazać lub skreślić) wszystko, czego nie chcesz zawrzeć w ostatecznym, ocenianym przez jury rozwiązaniu.

Zadanie 1. Wyznacz największą wartość wielomianu $p(x)$, wiedząc, że $p(x)$ jest wielomianem stopnia czwartego takim, że
$$p(-1) = p(1) = 5 \text{ i } p(-2) = p(0) = p(2) = 2.$$

Zadanie 2. W trójkącie ABC, długość boku AB jest równa długości boku AC i kąt przy wierzchołku A ma miarę 100^o. Na boku BC wybrano punkt D tak, by $AC = DC$ oraz punkt F na boku AB tak, by bok DF był równoległy do AC. Wyznacz miarę kąta DCF.

Zadanie 3. Niech a, b, c, d będą liczbami rzeczywistymi. Równanie $x^2 + ax + b = 0$ ma dwa pierwiastki rzeczywiste. Z drugiej strony, równanie
$$(x^2 - 2cx + d)^2 + a(x^2 - 2cx + d) + b = 0$$
nie ma rozwiązań rzeczywistych. Udowodnij, że
$$d^2 + ad + b > c^4.$$

Zadanie 4. Wyznacz wszystkie pary liczb całkowitych dodatnich (m, n) takich, że
$$m^3 - n^3 = 5mn + 43.$$